ISSN : 1693 – 1173

Penyelesaian Masalah Transshipmen Dengan Metoda Primal-Dual

Wawan Laksito YS [2)]

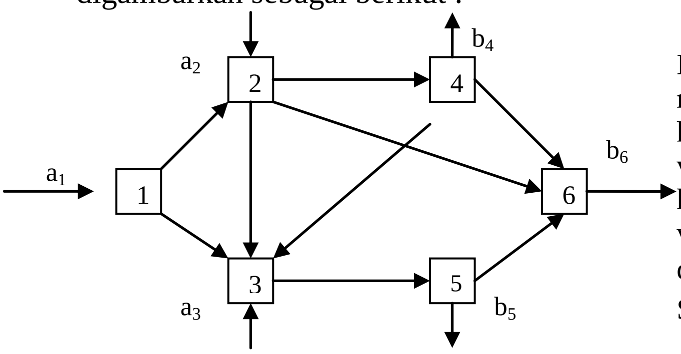
Abstrak

Masalah Pemindahan Muatan adalah masalah transportasi yang melibatkan sambungan yang harus dilewati. Objektifnya adalah menyusun suatu skedul transportasi yang akan memenuhi semua permintaan dengan total biaya minimum. Penyelesaian Primal-Dual masalah Transshipment diselesaikan dengan Algoritma Out-of Kilter dengan ide dapat ditentukan suatu solusi fisibel dari primal dan solusi fisibel dari dual sedemikian hingga kondisi complementary slackness dipenuhi.

I. Permasalahan

Masalah pemindahan muatan adalah masalah yang hampi mirip dengan masalah transportasi, yaitu menyangkut sumber yang memiliki suplay dan tempat tujuan yang memiliki permintaan. Masalah pemindahan muatan ini melibatkan sambungan yang harus dilewati oleh produk-produk yang dikirimkan. Sambungan ini berbeda dari sumber dan tempat tujuan, atau sebuah sumber dan tempat tujuan dapat pula merupakan fungsi dari suatu sambungan. Semua biaya pengiriman barang antara semua lokasi yang dapat dicapai diketahui. Objektifnya adalah menyusun suatu skedul transportasi yang akan memenuhi semua permintaan dengan total biaya minimum.

Ditinjau lewat pengertian network, maka masalah ini dapat digambarkan sebagai berikut :



Diberikan suatu network G'(V',E') dan himpunan vertex-vertex sumber $S \subset V'$, himpunan vertex-vertex tujuan $T \subset V'$, dengan $S \cap T = \phi$ dan $S \cup T = V'$

[2)] Staf Pengajar STMIK Sinar Nusantara Surakarta

a_i, $i \in S$ adalah suplai dengan $a_i = \sum_{j \in A(i)} f_{ij} - \sum_{j \in B(i)} f_{ji}$

b_j, $j \in T$ adalah permintaan dengan $b_j = \sum_{i \in A(j)} f_{ij} - \sum_{i \in B(j)} f_{ji}$

dan $a_i > 0$, $b_j > 0$, $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{j \in T} b_j$

Pada tiap edge (i,j) diberikan l_{ij} (batas bawah arus), u_{ij} (batas atas arus) dan c_{ij} (cost, biaya pengiriman) dengan l_{ij}, u_{ij}, c_{ij} bilangan-bilangan bulat.
Jika tak ada ketentuan khusus biasanya $l_{ij} = 0$, $u_{ij} = \infty$, $c_{ij} > 0$.
Jadi :

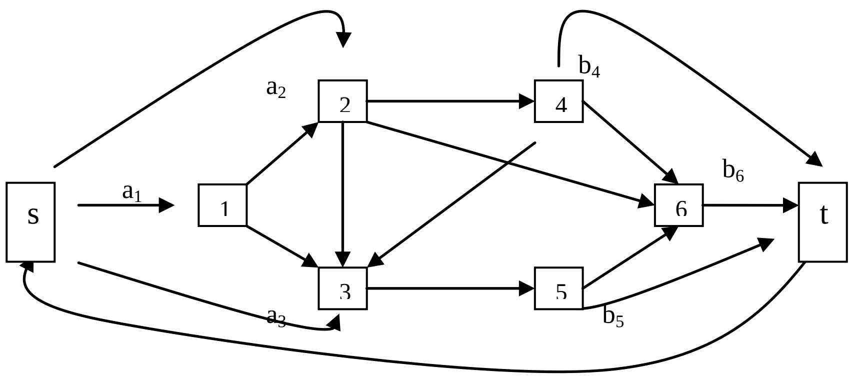
$$i \xrightarrow[l_{ij},\, u_{ij},\, c_{ij}]{} i$$

II. Tujuan

Menentukan sirkulasi dengan biaya minimum yang memenuhi semua unit produksi dan permintaan dengan diketahui batas bawah dan batas atas kapasitas.

III. Metoda Penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah diatas, network awal diubah dengan menambahkan vertex s, vertex t dan edge-edge seperti pada network berikut:



$$i \in S : u_{si} = a_i, c_{si} = 0; \;\; j \in T : l_{jt} = b_j, c_{jt} = 0;$$

$$(t,s): l_{ts} = u_{ts} = \sum_{i \in S} a_i , c_{ts} = 0$$

IV. Algoritma Out-of Kilter

Langkah Awal :

Diberikan harga awal untuk sirkulasi arus f_{ij} $(\forall(i,j) \in E)$ dan nomor vertex $\lambda_i (\forall i \in V)$

Step 1. :

1. Beri warna untuk setiap (i,j)$\in E$ sesuai dengan posisi dari (f_{ij}, $\lambda_j - \lambda_i$) pada diagram kilter .
2. Untuk setiap edge (i,j) berwarna kuning dan orange, hitung jarak horisontal δ_{ij} dan jarak vertikal ε_{ij} kearah garis kilter.

   Untuk setiap edge (i,j) hijau hitung $\delta_{ij}^{-} = l_{ij}$ dan $\delta_{ij}^{+} = u_{ij} - f_{ij}$

   Untuk setiap edge (i,j) merah susun :

   Jika $f_{ij} = l_{ij} : \varepsilon_{ij}^{-} = \infty, \varepsilon_{ij}^{+} = c_{ij} - (\lambda_j - \lambda_i)$

   Jika $f_{ij} = u_{ij} : \varepsilon_{ij}^{-} = f_{ij} - (\lambda_j - \lambda_i), \varepsilon_{ij}^{+} = \infty$
3. Jika semua edge adalah inkilter : STOP (sirkulasi optimum)
4. Pilih edge yang out-of kilter :

   Jika berwarna kuning, sebut sebagai (t,s) dan beri s label t^+, jika berwarna orangr, sebut sebagai (s,t) dan beri s label t^-.

Step 2. :

1. Jika semua vertex berlabel sudah discan, go to step 4.
2. Pilih vertex i yang berlabel dan belum discan, scan dengan cara berikut :

   $\forall(i,j)$ berwarna hijau atau kuning dengan j belum berlabel, beri j label i^+; $\forall(i,j)$ berwarna hijau atau orange denganj belum berlabel, beri j label i^-.
3. Jika t sudah berlabel, go tostep 3, jika tidak go to step 2.1.

Step 3. :

1. Dimulai dari label untuk t, telusuri cycle C dari t ke t. Pada waktu yang sama, tentukan δ sebagai bilangan terkecil dari :

   $\delta_{ij} / (i,j)$ adalah edge kuning forward pada C.

   $\delta^{+}{}_{ij} / (i,j)$ adalah edge hijauforward pada C.

   $\delta_{ij} / (i,j)$ adalah edge orange reverse pada C.

$\delta^{-}{}_{ij}$ $/(i, j)$ adalah edge hijau reverse pada C.

2. Susun :

   $f_{ij} = f_{ij} + \delta$, jika (i,j) edge forward pada C

   $f_{ij} = f_{ij} - \delta$, jika (i,j) edge reverse pada C

   kembali ke step 1

Step 4. :

1. Ambil X = himpunan vertex-vertex berlabel

   $\overline{X}$ = himpunan vertex-vertex tak berlabel

   Tentukan ε merupakan bilangan terkecil dari :

   ε_{ij} $/(i, j)$ adalah edge orange pada (X, $\overline{X}$)

   $\varepsilon^{+}{}_{ij}$ $/(i, j)$ adalah edge merah pada (X, $\overline{X}$)

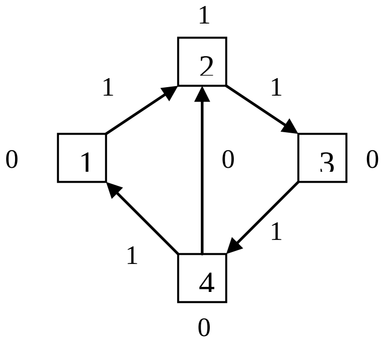
   ε_{ij} $/(i, j)$ adalah edge kuning pada ($\overline{X}$, X)

   $\varepsilon^{-}{}_{ij}$ $/(i, j)$ adalah edge merah pada ($\overline{X}$, X)

2. Jika $\varepsilon = \infty$ STOP, tidak ada arus fisibel
3. Susun : $\lambda_i = \lambda_i + \varepsilon$, untuk i $\in \overline{X}$

   Kembali ke step 1.

Contoh Permasalahan :
Diberikan Network G(V,E) pada gambar, arus awal f_{ij} pada masing-masing edge (i,j) dan nomor vertex awal λ_i pada masing-masing vertex i. Vertex-vertexnya adalah 1,2,3,4.



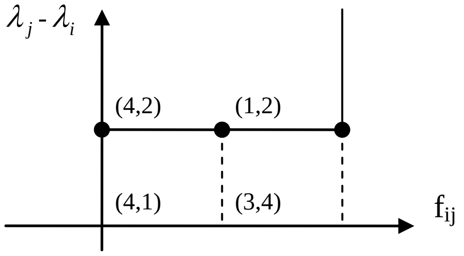
Dicari masing-masing arus pada edge sehingga merupakan sirkulasi fisibel yang mempunyai biaya pengiriman minimum.
C_{ij} adalah biaya pengiriman produk pada edge (i,j). l_{ij}, u_{ij}, c_{ij} diketahui sebagai berikut :

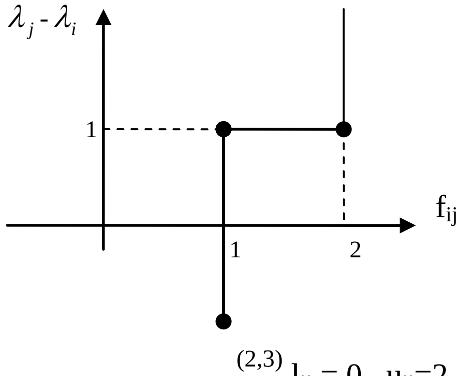
edge	l_{ij}	u_{ij}	c_i
(1,2)	0	2	1
(2,3)	1	2	1
(3,4)	0	2	1
(4,1)	0	2	1
(4,2)	0	2	1

Jawab :

				Harga awal		Harga Baru	
edge	l_{ij}	u_{ij}	c_i	f_{ij}	$\lambda_j - \lambda_i$	f_{ij}	$\lambda_j - \lambda_i$
(1,2)	0	2	1	1	1	0	1
(2,3)	1	2	1	1	-1	1	-2
(3,4)	0	2	1	1	0	1	1
(4,1)	0	2	1	1	0	0	0
(4,2)	0	2	1	0	1	1	1
				Total biaya = 4		Total biaya = 3	

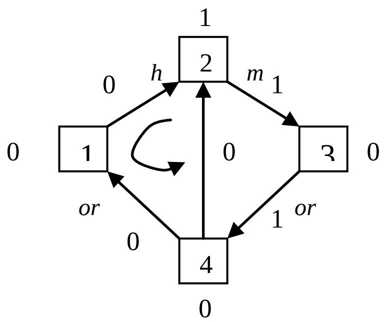
Diagram Kilter





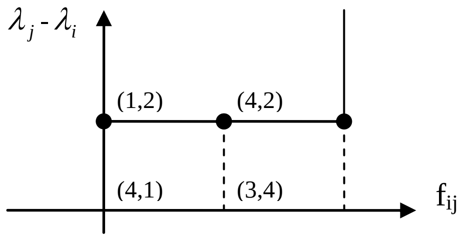
$l_{ij} = 0$, $u_{ij}=2$ $l_{ij} = 0$, $u_{ij}=2$

edge-edge (3,4) dan (4,1) out-of kilter jadi belum optimum.
Pewarnaan edge-edgenya :

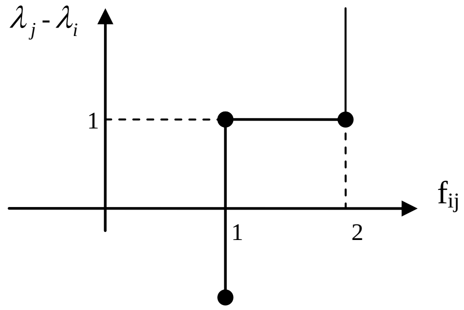


Didapat cycle yaitu : 4 – (4,2) – 2 – (1,2) – 1 –(4,1)
Ambil δ =1, diperoleh arus baru f_{ij}.

Diagram Kilter :



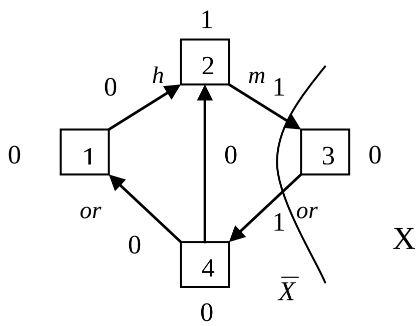
$l_{ij} = 0$, $u_{ij}=2$



(2,3) $l_{ij} = 0$, $u_{ij}=2$

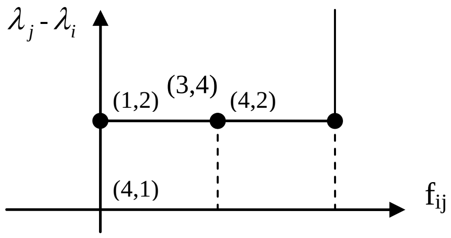
edge-edge (3,4) dan (4,1) out-of kilter jadi belum optimum.

Pewarnaan edge-edgenya :

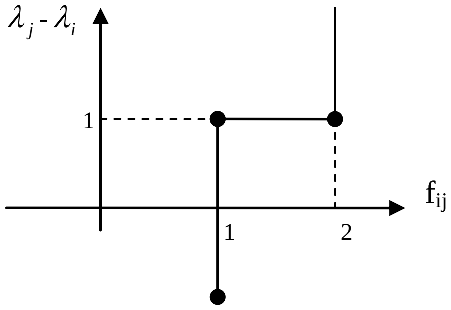


Tidak terdapat cycle.
Diperoleh cut-set (X, $\overline{X}$) dengan X = {3} dan $\overline{X}$ = {1,2,4}
Ambil ε =1, diperoleh nomor vertex baru.

Diagram Kilter :

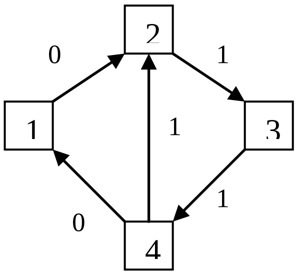


$l_{ij} = 0$, $u_{ij}=2$



(2,3) $l_{ij} = 1$, $u_{ij}=2$

Diperoleh semua edge adalah in kilter.
Jadi arus aalah optimal dengan besar arus masing-masing edge :



Total biaya (minimum) = $\sum_{(i,j)} f_{ij}c_{ij} = 3$

V. Kesimpulan

Masalah transshipment dapat diselesaikan dengan metoda primal-dual dengan menggunakan algoritma out-of kilter yaitu :

a. Jika semua edge sudah inkilter (pada garis kilter), maka berarti masalah terselesaikan (arus optimum tercapai)
b. Jika masih ada edge yang out of kilter, maka perlu diadakan perubahan-perubahan terhadap arus pada network atau nomor-nomor vertex network.

Untuk mengadakan perubahan pada nomor vertex, dicari suatu cut set (X, $\bar{X}$) $\exists$ (X, $\bar{X}$) terdiri edge-edge orange atau merah dan ($\bar{X}$, X) terdiri edge-edge kuning atau merah.

Daftar Pustaka

1. Chvatal, Vasek, ***"Linear Programming",*** W.H Freeman and Company, new York, 1993.
2. Taha, Hamdy A., **Operatios Research : An Introduction**, 4rd ed, Macmillan Publishing Co. Inc, New York, 1992
3. Jensen ,Poul Q, **Operation research Model & Metode**, Mathematical techniques of operation research http://www.londonexternal.ac.uk (akses 2007)
4. **Network Flow Programming** http://www.me.utexas.edu (akses 2007)

5. Jensen ,Poul Q, **Mathematical techniques of operation research** http://www.londonexternal.ac.uk (akses 2007)
6. Kamiński, Marcin ; Vadim Lozin, **Vertex 3-colorability of claw-free graphs**, Algorithmic Operations Research, Volume 2, Number 1 *http://journals.hil.unb.ca* (2007)