

Penyelesaian Masalah Transportasi Dengan Metoda Primal-Dual

Wawan Laksito YS ⁴⁾

Abstrak

Masalah Transportasi merupakan permasalahan pendistribuidan suatu produk homogen dari beberapa sumber ke beberapa tujuan dengan cara yang paling optimal. Metoda Primal-Dual merupakan penyelesaian masalah transportasi dari model matematika dengan ide dapat ditentukan suatu solusi fisibel dari primal dan solusi fisibel dari dual sedemikian hingga kondisi complementary slackness dipenuhi, maka permasalahan transportasi terselesaikan.

1. Permasalahan

Suatu masalah transportasi melibatkan m sumber daya (*resources*), dimana masing-masing tersedia a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) unit suatu produk homogen, dan n tempat tujuan (*destination*) yang masing-masing membutuhkan b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) unit produk. Bilangan-bilangan a_i dan b_j adalah bulat non negatif. Keuntungan (*benefit*) w_{ij} (atau biaya c_{ij}) dengan mentransformasikan suatu unit produk dari sumber i ke tujuan j diketahui untuk tiap-tiap i dan j . Objektifnya adalah menyusun suatu skedul transportasi bilangan bulat (satuan produk boleh berbentuk pecahan) yang memenuhi semua permintaan dari daftar barang-barang pada saat ini sehingga menghasilkan keuntungan yang maksimum (atau biaya yang minimum). Dianggap bahwa total penawaran sama dengan total permintaan.

Masalah transportasi tersebut dapat dimodelkan sebagai berikut: Diberikan bilangan-bilangan bulat non negatif $a_1, a_2, \dots, a_m$ dan $b_1, b_2, \dots,$

b_n sedemikian hingga $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = r$ dan bilangan-bilangan w_{ij} atau c_{ij}

, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

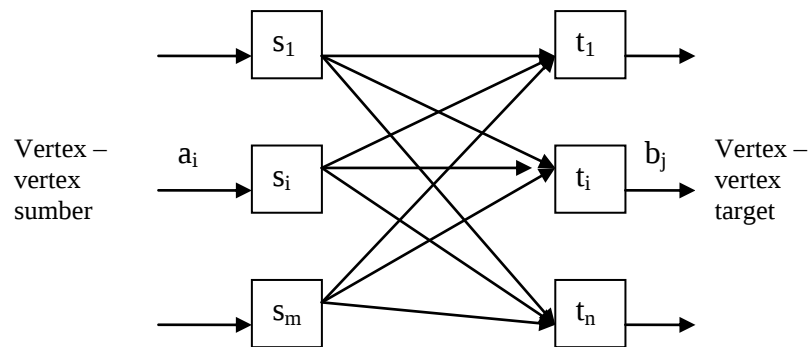
Akan dicari $x_{ij} \geq 0$ sedemikian hingga

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m ; \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

⁴⁾ Staf Pengajar STMIK Sinar Nusantara Surakarta

dan $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}$ maksimum atau $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ minimum

Masalah ini dapat digambarkan sebagai suatu network sebagai berikut :



a_i = arus masuk pada vertex s_i ; b_j arus keluar pada vertex t_j

Pada tiap edge (s_i, t_j) diberikan suatu bilangan w_{ij} atau c_{ij} .

Permasalahannya adalah bagaimana menentukan (mentransport) arus x_{ij}

dari s_i ke t_j sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}$ maksimum atau

$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ minimum.

2. Tujuan

Bagaimana menentukan kombinasi transportasi dari sumber ke tujuan dengan menggunakan metoda primal-dual.

3. Metoda Primal Dual

Dipandang bentuk Primal sebagai berikut :

Maksimalkan $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}$

Dengan kendala : $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$

$x_{ij} \geq 0$

Bentuk dual dari primal di atas adalah

Minimumkan
$$\sum_{i=1}^m a_i y_i + \sum_{j=1}^n b_j z_j$$

Dengan kendala $y_i + z_j \geq w_{ij}$ dimana y_i, z_j bebas dalam tanda.

Primal mempunyai penyelesaian optimum bila dan hanya bila Dual mempunyai optimum dan dalam hal ini maksimum objektif primal sama dengan minimum objektif pada dual.

Analisa Complementary Slackness

Jika $x_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, i = 1, 2, \dots, n$ dan

$$y_i + z_j \geq w_{ij} \text{ ekuivalen dengan } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_i + z_j) x_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (w_{ij} - y_i - z_j) x_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow (w_{ij} - y_i - z_j) x_{ij} = 0$$

sehingga didapat : $x_{ij} = 0$ atau $w_{ij} = y_i + z_j ; i=1, 2, \dots, m ; j=1, 2, \dots, n$

Dari analisa dualitas, complementary slackness dan dualitas masalah transportasi di atas dapat dipandang sebagai berikut : Dapat ditentukan suatu solusi fisibel dari primal dan solusi fisibel dari dual sedemikian hinngga kondisi complementary slackness dipenuhi, maka permasalahan terselesaikan (diperoleh x_{ij} yang merupakan solusi optimum).

4. Algoritma Metoda Primal-Dual Untuk Masalah Transportasi

Step 0 : (inisialisasi vertex berlabel)

1. Susun $y_i = \text{maksimum } w_{ij} (i=1, 2, \dots, m) z_j = 0, (j=1, 2, \dots, n)$
2. Konstruksikan suatu network $G(V, E)$
 $V = S \cup T \cup \{s, t\}$ dimana
 $S = \text{himpunan vertex-vertex sumber} = (s_1, s_2, \dots, s_m)$
 $T = \text{himpunan vertex-vertex target} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$
 $s = \text{source} ; t = \text{target}$

$E = \{(s, s_i), \forall s_i \in S\} \cup \{(t_j, t), \forall t_j \in T\} \cup J$ dengan

$$J = \{(s_i, t_j) / y_i + z_j = w_{ij}\}$$

3. Susun arus $x_{ij}=0, \forall \text{ edge } (s_i, t_j) \in J$.

Step 1. : (arus maksimum)

Dimulai dari arus yang diberikan, cari arus maksimum dari network G. Ambil L adalah himpunan dari vertex-vertex berlabel.

Kapasitas dari : $(s, s_i) = a_i, (t_j, t) = b_j, (s_i, t_j) = \infty, \forall i, j$

Ambil x_{ij} sebagai arus pada edge-edge (s_i, t_j) dan v adalah besar arus. Jika $v=r$: STOP, X_{ij} adalah solusi masalah, jika tidak, go to step 2.

Step 2. : Hitung $\otimes = \frac{1}{2} \text{minimum } (y_i + z_j - w_{ij})$

$$\forall (s_i, t_j); s_i \in L, t_j \in L'$$

Susun untuk $s_i \in L : y_i = y_i - \otimes$

$$t_j \in L : z_j = z_j - \otimes$$

$$s_i \in L' : y_i = y_i + \otimes$$

$$t_j \in L' : z_j = z_j + \otimes$$

Hapus (s_i, t_j) dari J jika $s_i \in L', t_j \in L$

Tambahkan (s_i, t_j) ke J jika $s_i \in L, t_j \in L'$ dan $y_i + z_j = w_{ij}$,

Ulangi step 1.

Contoh Permasalahan :

Perusahaan X yang memasarkan suatu komoditi tertentu mempunyai 4 pabrik dimana masing-masing pabrik mampu memproduksi sejumlah a_i barang per harinya ($i=1,2,3,4$). Pemesan barang-barang tersebut terdapat di 3 kota, dimana masing-masing pemesan per harinya mampu membeli sejumlah b_j barang ($j=1,2,3$). Dalam hal ini diasumsikan jumlah semua barang yang dapat diproduksi dari ke-4 pabrik perhari sama dengan jumlah semua barang yang mungkin dibeli oleh pemesan-pemesan di 3 kota tersebut. Keuntungan yang diterima oleh perusahaan dengan mengirim barang dari pabrik I ke pemesan di kota j sebesar w_{ij} rupiah ditabel kan sebagai berikut :

$a_i \setminus b_j$	2	3	5
2	2	4	1
2	3	1	1
3	3	2	2
3	4	3	4

Diperlukan cara pendistribusian barang-barang agar semua produksinya terjual dan diperoleh keuntungan maksimum.

Penyelesaian :

Jika jumlah barang yang didistribusikan dari pabrik I ke kota j adalah x_{ij} (dengan $x_{ij} \geq 0$), maka masalah transportasi di atas dapat disajikan sebagai berikut :

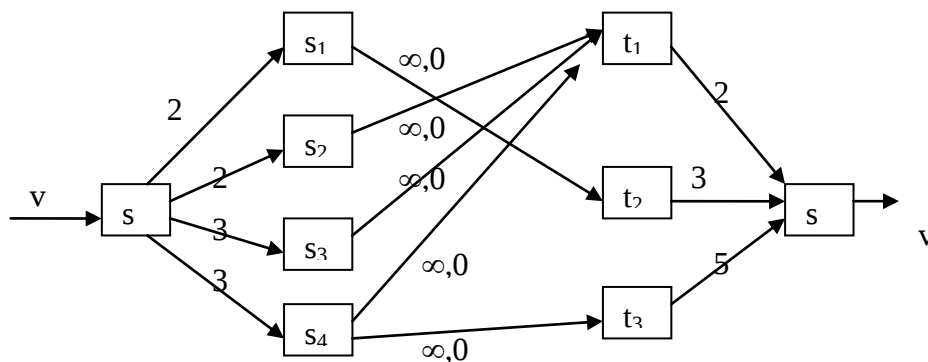
Maksimalkan
$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 w_{ij} x_{ij}$$

Dengan kendala :
$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i ; \quad \sum_{i=1}^4 x_{ij} = b_j$$

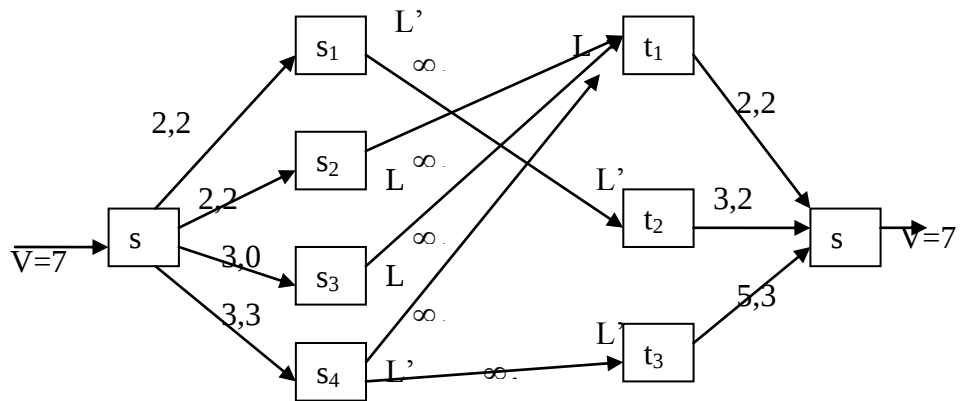
$$x_{ij} \geq 0$$

dalam hal ini $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = r = 10$

Dicari y_i dan z_j yang memenuhi solusi fisibel dari dual sebagai berikut :
 Netwoknya :



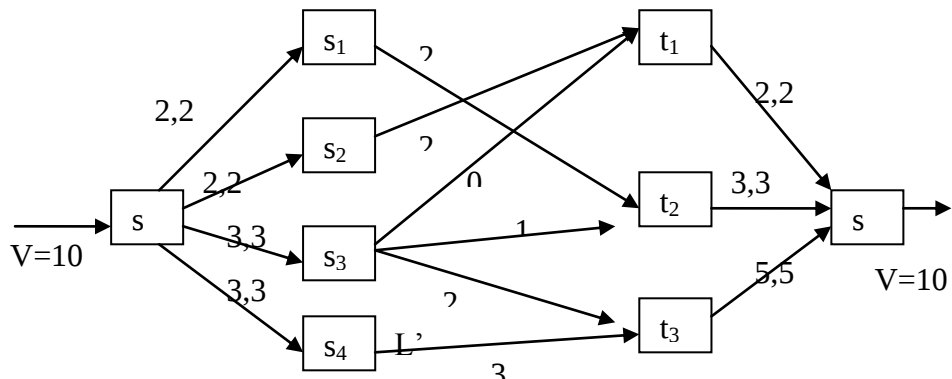
Iterasi 1 : Mencari arus Maksimum



$V=7 \neq r=10$ perlu diadakan perubahan untuk harga-harga y_i dan z_j dan semua (s_i, t_j) dengan $s_i \in L$, $t_j \in L'$. $\otimes = 1/2$. Harga baru y_i' dan z_j' terlihat pada tabel berikut :

$a_i \setminus b_j$	2	3	5		
2	2	4	1	4	4.5
2	3	1	1	3	2.5
3	3	2	2	3	3.5
3	4	3	4	4	4.5
	0	0	0	$z_j \setminus y_i$	y_i
	0.5	-0.5	-0.5	z_j	

Iterasi 2 : Mencari arus Maksimum untuk network yang baru



Karena besar arus maksimum $v=r=10$, maka STOP.
Distribusi barangnya adalah :

$$x_{ij}$$

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	2	0
2	2	0	0
3	0	1	2
4	0	0	3

$$w_{ij}$$

$i \backslash j$	1	2	3
1	2	4	1
2	3	1	1
3	3	2	2
4	4	3	4

$$\begin{aligned} \text{Keuntungan Maksimum} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 w_{ij} x_{ij} \\ &= 4.2 + 3.2 + 2.1 + 2.2 + 4.3 = 32 \end{aligned}$$

5. Kesimpulan

Masalah transportasi dapat diselesaikan dengan ide dari metoda primal dual, yaitu menyelesaikan masalah arus maksimum pada network $G(V,E,U)$ dengan $V=\{s,t,S,T\}$ dengan $S=\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $T=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

s = vertex sumber, t = vertex target.

$E = \{(s,s_i), (s_i, t_j), (t_j,t)\}$; $u = a_i$, pada edge-edge (s,s_i) , $u=b_j$, pada edge-edge (t_j,t) , $u=\infty$, pada edge-edge (s_i,t_j)

Besar arus v pada $(s_i,t) = x_{ij}$

- Jika dicapai besar arus $v=r$, maka masalah terselesaikan, diperoleh solusi optimum.
- Jika $v < r$, arus perlu diperbesar dengan mengadakan perubahan untuk harga-harga y_i dan z_j (misal y_i' dan z_j' sehingga $y_i' + z_j' \geq w_{ij}$ (merupakan fisibel dual)

Pustaka

1. Chvatal, Vasek, "**Linear Programming**", W.H Freeman and Company, new York, 1993.
2. Taha, Hamdy A., **Operatios Research : An Introduction**, 4rd ed, Macmillan Publishing Co. Inc, New York, 1992
3. Jensen ,Poul Q, **Operation research Model & Metode**, Mathematical techniques of operation research <http://www.londonexternal.ac.uk> (akses 2007)
4. **Network Flow Programming** <http://www.me.utexas.edu> (akses 2007)
5. Jensen ,Poul Q, **Mathematical techniques of operation research** <http://www.londonexternal.ac.uk> (akses 2007)