Penerapan Aljabar Matrik Dalam Analisa Masukan-Keluaran
Elistya Rimawati⁶⁾

Abstrak

Analisa masukan-keluaran bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri atas sector-sector yang saling berkaitan. Langkah analisis dimulai dengan menyusun matriks transaksi yang menggambarkan hubungan antar sector. Matrik transaksi selanjutnya menghasilkan koefisien teknologi. Koefisien teknologi dibentuk sebagai vector kolom. Dengan operasi matrik dari vector koefisien teknologi dapat ditentukan nilai nilai keluaran.

I. Permasalahan

Analisa masukan-keluaran (*input-output analysis*) merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antar sector atau kegiatan ekonomi. Model ini lazim diterapkan untuk menganalisa perekonomian secara makro, nasional ataupun regional. Analisa masukan-keluaran bertolak dari anggapan bahwa suatu system perekonomian terdiri atas sector-sector yang saling berkaitan. Masing-masing sector menggunakan keluaran dari sector lain sebagai masukan bagi keluaran yang akan dihasilkan, selanjutnya keluaran yang dihasilkan menjadi masukan bagi sector lain. Selain menjadi masukan bagi bagi sector lain, terdapat pula keluaran suatu sector yang menjadi masukan bagi sector itu sendiri dan sebagai konsumsi bagi pemakai akhir.

Dari model hubungan sector-sector tersebut perlu dimodelkan yang merepresentasikan keterkaitan antar sector dan dilakukan pencarian koefisien hubungan antar sector untuk menentukan keluaran.

II. Tujuan

Menentukan koefisien masukan, keluaran dan nilai tambah yang dihasilkan dari keterkaitan sector-sector ekonomi menggunakan metoda Aljabar Linier.

⁶⁾ Staf Pengajar STMIK Sinar Nusantara Surakarta

III. Metoda Penyelesaian

3.1. Matriks Transaksi

Langkah awal dalam analisis masukan-keluaran adalah menyusun suatu table yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana keluaran suatu sector terdistribusi ke sector-sector lain sebagai masukan dan ke pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Tabel demikian dinamakan matriks transaksi atau matriks masukan-keluaran. Format matriks transaksi seperti terlihat pada Gambar 1.

	Distribusi Konsumsi	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Distribusi Produksi	X_{11} X_{12} X_{1m}	U_1	X_1
	X_{21} X_{22} X_{2m}	U_2	X_2
		.	.
	X_{m1} X_{m2} $X_{m\ m}$	U_m	X_m
Nilai Tambah	Y_1 Y_2 Y_m	U_{m+1}	X_{m+1}
Keluaran Total	X_1 X_2 X_m	X_{m+1}	x

Gambar 1. Matriks Transaksi

Tabel transaksi dapat dituliskan dalam bentuk notasi matriks. Misalnya X_{ij} melambangkan keluaran dari sector i yang dipergunakan sebagai masukan oleh sector j , U_i melambangkan permintaan akhir terhadap keluaran sector i , Y_j melambangkan nilai tambah sector j , dan X_j adalah keluaran total dari sector j .

Pemakaian total oleh sector i :

$$X_i = \sum_{j=1}^m X_{ij} + U_i \quad i = 1, 2, \dots, m+1$$

Keluaran total dari sector j :

$$X_j = \sum_{i=1}^m X_{ij} + Y_j \quad j = 1, 2, \dots, m+1$$

3.2 Matriks Teknologi

Dari matriks transaksi di atas dapat diketahui, bahwa bagi sector j untuk memproduksi keluaran sejumlah X_j diperlukan masukan-masukan dari sector 1 hingga sector m dan sejumlah tertentu nilai tambah atau masukan primer. Hal ini berarti bahwa masing-masing kolom menggambarkan hubungan masukan-keluaran antar sector. Pada saat yang sama matriks transaksi memberikan informasi tentang bagaimana keluaran dari suatu sector terdistribusi di antara sector-sector yang ada, termasuk sector konsumen akhir. Hal inipun menggambarkan hubungan masukan-keluaran antar sector. Jika nilai setiap unsur dalam matriks transaksi tersebut dibagi dengan nilai jumlah baris atau nilai jumlah kolom yang bersesuaian (misal X_{1j} dibagi X_j atau X_{2j} dibagi dengan X_j), maka diperoleh suatu rasio yang dinamakan koefisien teknologi.

$$\text{Koefisien teknologi } a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \quad i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, m$$

Koefisien teknologi a_{ij} adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai keluar sector I yang diperlukan sebagai masukan untuk menghasilkan satu unit keluaran di sector j.

Jika semua koefisien teknologi yang ada dihitung (a_{ij} dihitung untuk semua i dan j) dan hasil-hasilnya disajikan dalam suatu matriks, diperolehlah sebuah matriks teknologi. Jadi matriks, teknologi adalah suatu matriks analisis masukan-keluaran yang unsur-unsurnya berupa koefisien teknologi.

Secara umum matriks teknologi dapat dirumuskan sebagai :

Matriks Teknologi

Sektor	Sektor			
	1	2		m
1	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}		a_{2m}
.	.	.		
.	.	.		
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mm}
Nilai Tambah	$(1 - \sum_i a_{i1})$	$(1 - \sum_i a_{i2})$		$(1 - \sum_i a_{im})$

Sedangkan himpunan koefisien teknologi untuk unsure-unsur permintaan akhir dan keluaran total masing-masing adalah berupa vector kolom.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_m \end{bmatrix}$$

Karena koefisien masukan $a_{ij} = X_{ij}/X_j$, berarti $X_{ij} = a_{ij}X_j$.
Menurut matriks transaksi,

$$X_i = \sum_{j=1}^m X_{ij} + U_i$$

Padahal $X_{ij} = a_{ij}X_j$

Maka $X_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}X_j + U_i$

Bila diuraikan,

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{im}X_m + U_i$$

Atau

$$U_i = X_i - a_{i1}X_1 - a_{i2}X_2 - \dots - a_{im}X_m$$

Untuk masing-masing i,

$$\begin{aligned}
U_1 &= X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1m}X_m \\
&= (1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1m}X_m \\
U_2 &= X_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \dots - a_{2m}X_m \\
&= -a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 - \dots - a_{2m}X_m \\
&\vdots \\
U_m &= X_m - a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \dots - a_{mm}X_m \\
&= -a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \dots + (1 - a_{mm})X_m
\end{aligned}$$

Secara ringkas dapat ditulis dengan notasi matriks :

$$U_{mx1} = (I - A)_{mxm} X_{mx1}$$

U dan X masing-masing adalah vector-kolom permintaan akhir dan vector kolom secara keluaran total, I adalah matriks satuan, sedangkan A adalah matriks teknologi yang dibentuk berdasarkan matriks transaksi.

Jika matriks I-A nonsingular, yakni $|I-A| \neq 0$, maka ia akan mempunyai balikan (*Transpose*). Dalam hal ini $U = (I-A)X$ dapat ditulis menjadi

$$X_{mx1} = (I - A)^{-1}_{mxm} U_{mx1}$$

Ini berarti bahwa jika matriks A dan vector U diketahui, maka vector X dapat dicari secara langsung menurut kaidah matriks. Dengan kata lain jika masing-masing koefisien masukan antar sector dan permintaan akhir untuk setiap sector diketahui datanya, maka dapatlah dihitung keluaran total dari masing-masing sector. Lebih lanjut dapat dihitungnya keluaran total sektoral akan dapat pula dihitung keluaran total nasional (GDP atau GNP). Satu hal yang penting diperhatikan dalam analisis masukan-keluaran adalah bahwa koefisien masukan senantiasa dianggap senantiasa konstan. Jadi model tersebut merupakan analisa statis.

IV. Contoh Permasalahan

Hubungan masukan-keluaran antar sector dalam perekonomian sebuah Negara ditunjukkan oleh table transaksi sebagai berikut :

Keluaran \ Masukan	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai Tambah	55	125	115	70	365
Keluaran Total	100	290	235	365	990

Pembacaan table ke samping berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran (*output*) sector pertanian senilai 100, senilai 20 digunakan oleh sector itu sendiri sebagai masukan (*input*), senilai 35 digunakan oleh sector industri sebagai masukan sector tersebut, senilai 5 digunakan sebagai masukan sector jasa dan sisanya senilai 40 dibeli oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi. Pembacaan table ke bawah berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran sector pertanian senilai 100, senilai 20 berupa masukan dari sector itu sendiri, senilai 15 berupa masukan yang berasal dari sector industri, senilai 10 berupa masukan dari sector jasa, dan selebihnya merupakan nilai tambah (*add value*) sector pertanian tersebut yaitu senilai 55.

Matrik teknologi :

$$\begin{array}{l}
 \text{Pertanian} \\
 \text{Industri} \\
 \text{Jasa} \\
 \text{Nilai tambah}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 \text{P} & \text{I} & \text{J} \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 0,20 & 0,12 & 0,02 \\
 0,15 & 0,28 & 0,26 \\
 0,10 & 0,17 & 0,23 \\
 \underline{0,55} & \underline{0,43} & \underline{0,49} \\
 1,00 & 1,00 & 1,00
 \end{array} \right] = A
 \end{array}$$

Menurut Rumus $X=(I-A)^{-1}U$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0,20 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 1-0,28 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 1-0,23 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Determinan } |I-A| &= (0,8)(0,72)(0,77)+(-0,12)(-0,26)(-0,10) + \\ &\quad (-0,02)(-0,17)(-0,15)-(-0,10)(0,72)(-0,02)- \\ &\quad (-0,15)(-0,12)(0,77)-(0,80)(-0,26)(-0,17) \\ &= 0,38923 \end{aligned}$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{\text{adj.}(I-A)}{|I-A|}$$

$$\begin{bmatrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5102 & 0,0958 & 0,0456 \\ 0,1415 & 0,6140 & 0,2110 \\ 0,0975 & 0,1480 & 0,5580 \end{bmatrix} : 0,38923$$

$$= \begin{bmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{bmatrix}$$

Dengan Demikian

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{bmatrix}$$

Jadi keluaran total masing-masing sector akan menjadi :

$$\begin{aligned} \text{Pertanian} &= 228,33 \\ \text{Industri} &= 618,02 \\ \text{Jasa} &= 425,83 \end{aligned}$$

Sedangkan nilai tambah sector

$$\begin{aligned} \text{Pertanian} &= 0,55 \times 228,33 = 125,58 \\ \text{Industri} &= 0,43 \times 618,02 = 265,06 \\ \text{Jasa} &= 0,49 \times 425,83 = 208,66 \end{aligned}$$

V. Kesimpulan

Analisa masukan-keluaran dapat dimodelkan dengan matriks dan diselesaikan dengan prinsip-prinsip Aljabar Linier dengan operasi matriks yaitu dengan membentuk matriks transaksi, koefisien teknologi dan menyelesaikan hubungan matriks transaksi dan koefisien teknologi dengan operasi determinan matriks dan perkalian matriks.

Daftar Pustaka

1. Dumairy, *Matematika Terapan Untuk Bisnis Dan Ekonomi*, edisi kedua, BPFE- Yogyakarta, Yogyakarta, 1995.
2. Jensen, Iris, *The Leontif Open Production Model or Input-Output Analysis*,
<http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/Fall2001/Iris/lapaper.pdf> , 2001
3. O'Sullivan, Arthur, *Urban Economics : Input-Output Analysis*, McGraw-Hill, Irwin, 2003
4. Ten Raa, Thijs. *The Economics of Input-Output Analysis*. Cambridge University Press, 2005.
5. Weber, Jean E, *Mathematical Analysis: Business and Economic Applications*, 4th edition, McGraw-Hill, New York, 1984.